אוקלידי $\Leftarrow$ ראשי $\Leftarrow$ פריקות יחידה = אטומי+כל אי פריק ראשוני.

דוגמאות לO_D אוקלידיים

- $\mathbb{Z}\left[\frac{\sqrt{-19}+1}{2}\right] = O_D$ ראשי אבל לא אוקלידי.
- $\mathbb{Z}\left[\sqrt{-1}\right]$ אוקלידי $\Leftarrow$ ראשי

יהי R תחום שלמות ראשי. כל אידאל הוא מהצורה Ra.
אפשר לפרק באופן יחיד $a = \prod p_i^{\alpha_i}$. p_i ראשוניים שונים(לא חברים)

טענה

בחוג ראשי, כל אידאל ראשוני$\neq 0$ הוא מקסימלי.

הוכחה

נניח ש$I = Rp$ אידאל ראשוני(אז p ראשוני). נניח ש$I \subseteq M \underset{\neq}{\lhd} R$. מכיוון ש$R$ ראשי, אפשר לכתוב $M = Ra$.
$M = Ra = Rp = I \Leftarrow a \sim p$ (או $M = R \Leftarrow$ הפיך a) $\Leftarrow a|p \Leftarrow I \subseteq M$

הערה

$\langle x \rangle \subsetneq \langle x, y \rangle$($x$ איבר ראשוני, $\langle x \rangle$ אידאל ראשוני) בחוג $\mathbb{F}[x, y]$.
(זו דוגמה לאידאל ראשוני לא מקסימלי, בחוג לא ראשי)

הערה

R ראשי. אם p, p' איברים ראשוניים שאינם חברים, אז $Rp \neq Rp'$ ולכן קו־מקסימליים

סיכום

יהי R חוג ראשי, $a = \prod p_i^{\alpha_i}$, p_i לא חברים.

$$R/Ra \cong R/Rp_1^{\alpha_1} \times \cdots \times R/Rp_m^{\alpha_m}$$

הראינו שכאשר Rp_i מקסימלי, המנה $R/Rp_i^{\alpha_i}$ היא חוג מקומי.
(Rp_i, Rp_j קומקסימליים ושונים, לכן גם $Rp_i^{\alpha_i}, Rp_j^{\alpha_j}$ קומקסימליים)
מקרה מיוחד R/Rp_i שדה.

מסקנה

$\mathbb{F}$ שדה.

$\mathbb{F}[x]$ הוא תחום שלמות אוקלידי(תרגיל)

$\Leftarrow$ $\mathbb{F}[x]$ ראשי

$\Leftarrow$ לכל פולינום $f \in \mathbb{F}[x]$ יש פירוק יחיד

$$f = \prod p_i^{\alpha_i}$$

כאשר p_i פולינומים אי פריקים, כל p_i ראשוני, ו$\mathbb{F}[x]/\mathbb{F}[x]p_i$ שדה.

פולינומים ושדות

להלן, $\mathbb{F}$ הוא שדה.

נסתכל על חוג הפולינומים $\mathbb{F}[x]$.

נניח שיש $\mathbb{F} \subset K$ שדה. יהי $a \in K$.

אפשר להגדיר $\Phi_a : F[x] \to K$ על ידי $c \mapsto c$ לכל $c \in \mathbb{F}$, ו$x \mapsto a$. לכל $f(x) = \sum \alpha_i x^i$ ($\alpha_i \in \mathbb{F}$)

$$\Phi_a(f) = \Phi\left(\sum \alpha_i x^i\right) = \sum \Phi(\alpha_i)\Phi(x)^i = \sum \alpha_i a^i = f(a)$$

תרגיל: Φ_a הוא באמת הומומורפיזם.

$$\mathbb{F}[x]/\ker\Phi_a \cong \mathrm{Im}\Phi_a \subseteq K$$

מכיוון ש$\mathbb{F}[x]$ אוקלידי, קיים g_a כך ש$\ker\Phi_a = \langle g_a \rangle$, כלומר

$$g_a | h \Leftrightarrow h(a) = 0$$

g_a = <u>ה</u>פולינום המינימלי של a.

הערה: לכל חוג פולינומים אפשר למצוא K, a כך שזה יהיה הפולינום מינימלי.

עכשיו, נניח שK שדה(תחום שלמות).

מכיוון ש$\mathbb{F}[x]/\ker\Phi_a$ תחום שלמות, $\ker\Phi_a$ ראשוני. לכן g_a פולינום ראשוני($g_a \equiv$ אי פריק).

<u>כלומר</u>: הפולינום המינימלי של איבר של שדה הוא אי פריק ב$\mathbb{F}[x]$.

(a נקרא טרנסדנדנטי אם Φ_a חח"ע; $g_a = 0$; $\mathrm{Im}\Phi_a \cong \mathbb{F}[x]$)

(אחרת a נקרא אלגברי)

נתבונן בבעיה הפוכה: נתון שדה $\mathbb{F}$ ופולינום אי פריק p מעל $\mathbb{F}$; מצא שדה $\mathbb{F} \subseteq K$ ואיבר $a \in K$ שp הפולינום המינימלי שלו

$$p(a) = 0$$

משפט

לכל פולינום אי פריק p מעל שדה $\mathbb{F}$ קיים שדה $F \subseteq K$ עם שורש של p.

הוכחה

$$K = \mathbb{F}[\mathrm{x}]/\langle \mathrm{p} \rangle$$

p אי פריק $\Leftrightarrow$ p ראשוני $\Leftarrow \langle p \rangle$ ראשוני $\Leftarrow$ $\langle p \rangle$ מקסימלי. לכן K שדה.
נסמן $a = x + \langle p \rangle$.